

Teorías de falla bajo cargas estáticas

Carlos Armando De Castro P.

Contenido:

- 1- Introducción
- 2- Falla de materiales dúctiles
- 3- Falla de materiales frágiles

1. Introducción

La falla es la pérdida de función de un elemento tanto por deformación (fluencia) como por separación de sus partes (fractura).

Los mecanismos de falla dependen de la estructura microscópica del material y de la forma de sus enlaces atómicos. Para predecir la falla de materiales bajo cargas estáticas (se considera carga estática a aquella que no varía su magnitud ni dirección en el tiempo) y poder hacer diseños de elementos de máquinas confiables se han desarrollado varias teorías para grupos de materiales, basándose en observaciones experimentales.

Las teorías de falla se dividen en dos grupos:

Materiales dúctiles	Materiales frágiles
<ul style="list-style-type: none">- Teoría del Esfuerzo Cortante Máximo – Teoría de Tresca (MSS)- Teoría de la Energía de Distorsión – Teoría de Von Misses (DE)- Teoría de la Fricción Interna - Coulomb-Mohr Dúctil (IFT)	<ul style="list-style-type: none">- Teoría del Máximo Esfuerzo Normal – Teoría de Rankine (MNS)- Teoría de Coulomb Mohr Frágil (BCM)

Tabla 1.1. Teorías de falla.

En el presente escrito se presenta un resumen de las teorías de falla bajo cargas estáticas utilizadas para el análisis y diseño de elementos de máquinas y estructurales.

2. Falla de materiales dúctiles

Se considera dúctil a un material que en el ensayo de tensión haya tenido más del 5% de deformación antes de la fractura. En los materiales dúctiles se considera que la falla se presenta cuando el material empieza a fluir (falla por deformación).

2.1. Teoría del Esfuerzo Cortante Máximo

También conocida como Teoría de Tresca. Establece que la fluencia del material se produce por el esfuerzo cortante, surgió de la observación de la estricción que se produce en una probeta cuando es sometida a un ensayo de tensión. La teoría dice:

“La falla se producirá cuando el esfuerzo cortante máximo absoluto en la pieza sea igual o mayor al esfuerzo cortante máximo absoluto de una probeta sometida a un ensayo de tensión en el momento que se produce la fluencia”

Para un elemento bajo la acción de esfuerzos tenemos el círculo de Mohr:

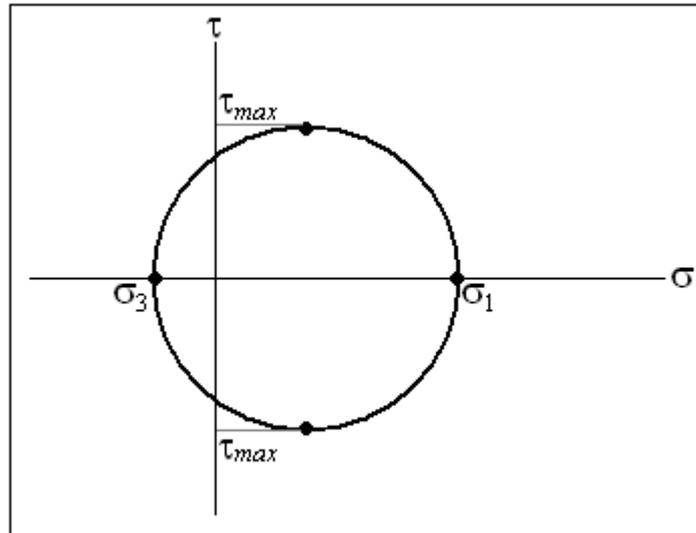


Figura 2.1. Círculo de Mohr para un elemento.

El esfuerzo cortante máximo absoluto es entonces:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (2.1)$$

El círculo de Mohr para el ensayo de tensión en el momento de la fluencia es:

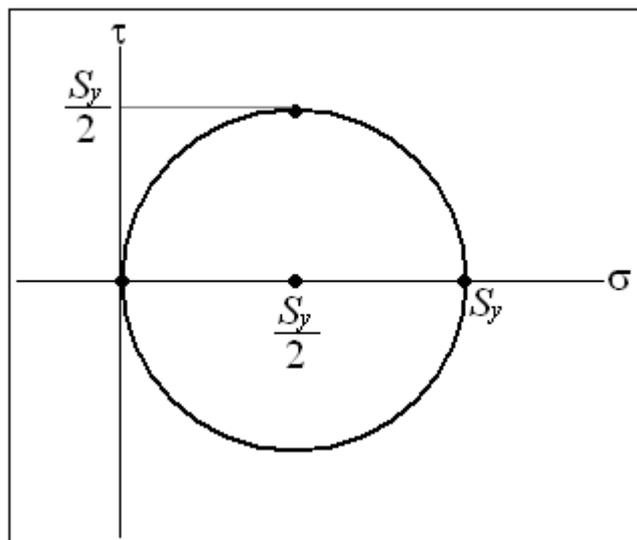


Figura 2.2. Círculo de Mohr para el ensayo de tensión al momento de la fluencia.

El esfuerzo cortante máximo absoluto es entonces para el ensayo de tensión al momento de la fluencia:

$$\tau_{\max} = \frac{S_y}{2}$$

(2.2)

Según la teoría de Tresca, igualamos las ecuaciones 2.1 y 2.2 y tenemos:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{S_y}{2}$$

$$\sigma_1 - \sigma_3 = S_y$$

(2.3)

La ecuación 2.3 se utiliza cuando $\sigma_1 > 0 > \sigma_3$. En los otros casos:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= S_y, \text{ cuando } \sigma_1 > \sigma_3 > 0 \\ \sigma_3 &= -S_y, \text{ cuando } 0 > \sigma_1 > \sigma_3 \end{aligned}$$

(2.4)

En el plano $\sigma_1 - \sigma_3$, la teoría de Tresca se representa gráficamente como:

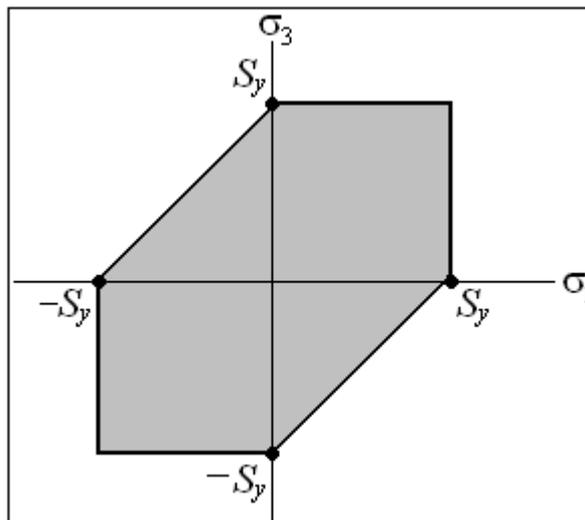


Figura 2.3. Representación gráfica de la Teoría de Tresca.

La falla se presentará cuando el punto determinado por los esfuerzos σ_1 y σ_3 se encuentra fuera del área sombreada en la figura 2.3.

2.2. Teoría de la Energía de Distorsión

Propuesta por R. Von Mises al observar que los materiales bajo esfuerzos hidrostáticos soportan esfuerzos mucho mayores que sus esfuerzos de fluencia bajo otros estados de carga. La teoría establece:

“La falla se producirá cuando la energía de distorsión por unidad de volumen debida a los esfuerzos máximos absolutos en el punto crítico sea igual o mayor a la energía de distorsión por unidad de volumen de una probeta en el ensayo de tensión en el momento de producirse la fluencia”

La teoría de Von Mises dice que la distorsión del elemento es debida a los esfuerzos principales restándole los esfuerzos hidrostáticos ($\sigma_h = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$). La *energía de distorsión* es la diferencia entre la energía total de deformación por unidad de volumen y la energía de deformación por unidad de volumen debida a los esfuerzos hidrostáticos.

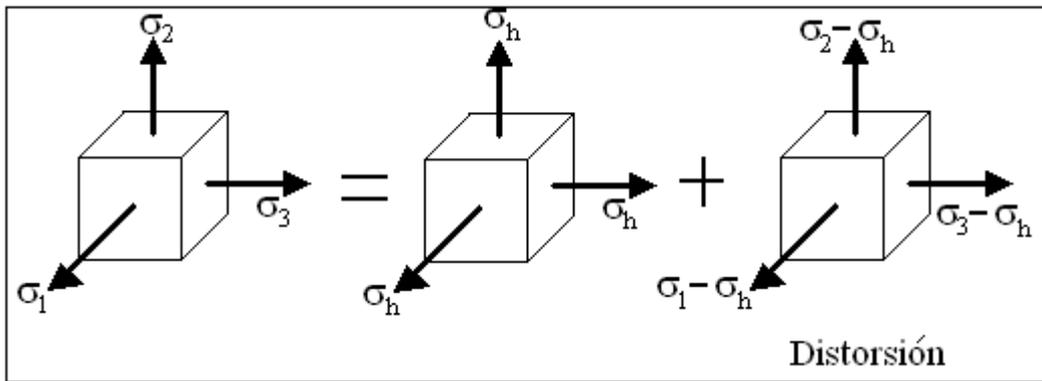


Figura 2.4.

Como el material se encuentra en el rango elástico (ya que la falla se produce al llegar a la zona plástica), la energía total de deformación por unidad de volumen para el elemento es

$$U = \frac{1}{2}\sigma_1\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\sigma_2\varepsilon_2 + \frac{1}{2}\sigma_3\varepsilon_3 \quad (2.5)$$

Las deformaciones son:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Reemplazando las deformaciones de la ecuación 2.6 en la ecuación 2.5 resulta la energía total de deformación:

$$U = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)] \quad (2.7)$$

La energía de deformación debida a los esfuerzos hidrostáticos es:

$$U_h = \frac{3(1-2\nu)}{2E} \sigma_h^2 = \frac{3(1-2\nu)}{2E} \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \right)^2 \quad (2.8)$$

La energía de distorsión es entonces:

$$U_d = U - U_h$$

$$U_d = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)] - \frac{3(1-2\nu)}{2E} \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \right)^2$$

$$\boxed{U_d = \frac{1+\nu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3)}$$

(2.9)

En el ensayo de tensión al producirse la fluencia, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0, \sigma_1 = S_y$ y entonces la energía de distorsión en la probeta es:

$$\boxed{U_d = \frac{1+\nu}{3E} S_y^2}$$

(2.10)

Igualando las ecuaciones 2.9 y 2.10 como lo dice el enunciado de la teoría, tenemos:

$$\frac{1+\nu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3) = \frac{1+\nu}{3E} S_y^2$$

$$\boxed{\begin{aligned} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3} &= S_y \\ \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}{2}} &= S_y \end{aligned}}$$

(2.11)

Se define el *esfuerzo de Von Misses* como

$$\boxed{\sigma' = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3} = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}{2}}}$$

(2.12)

Entonces, la falla se da cuando

$$\boxed{\sigma' = S_y}$$

(2.13)

En el caso bidimensional, $\sigma_2 = 0$ y el esfuerzo de Von Misses es:

$$\sigma' = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_3} \quad (2.14)$$

Para el caso bidimensional, en el plano $\sigma_1 - \sigma_3$, la teoría de Von Misses se representa gráficamente como:

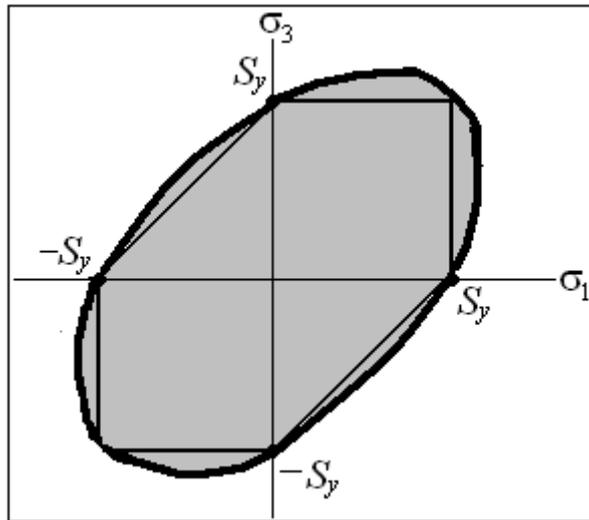


Figura 2.5. Representación gráfica de la teoría de la energía de distorsión.

La falla se presentará cuando el punto determinado por los esfuerzos σ_1 y σ_3 se encuentra fuera del área sombreada en la figura 2.5. La línea más gruesa representa las locaciones donde se presentará la falla de acuerdo con Von Misses, las líneas interiores más delgadas representan las locaciones de falla de acuerdo con Tresca.

De la figura 2.5 puede observarse que la teoría de Von Misses tiene un mayor área en la cual no se presentará falla que la teoría de Tresca, por eso la teoría del esfuerzo cortante máximo es la teoría escogida para hacer cálculos *conservadores* de falla de un material y tener mayor certeza de que no se producirá falla.

Si se considera un elemento que se encuentre bajo cortante puro en el momento de la falla, donde el esfuerzo cortante a la fluencia es S_{sy} el esfuerzo de Von Misses resulta ser de la ecuación 2.12:

$$\sigma' = \sqrt{3}S_{sy}$$

Y la falla se da cuando

$$\sqrt{3}S_{sy} = S_y$$

Donde S_y es el esfuerzo de fluencia a la tensión, entonces resulta la importante relación:

$$\boxed{S_{sy} = 0.577S_y} \quad (2.15)$$

2.3. Teoría de Coulomb-Mohr Dúctil

También conocida como Teoría de la Fricción Interna (IFT). Ésta teoría tiene en cuenta que el esfuerzo de fluencia a tensión (S_{yt}) es diferente al esfuerzo de fluencia a compresión (S_{yc}), donde generalmente $S_{yc} > S_{yt}$. Se basa en los ensayos de tensión y compresión, y establece que en el plano $\sigma - \tau$ la línea tangente a los círculos de Mohr de los ensayos de tensión y compresión al momento de la fluencia es la locación de la falla para un estado de esfuerzos en un elemento.

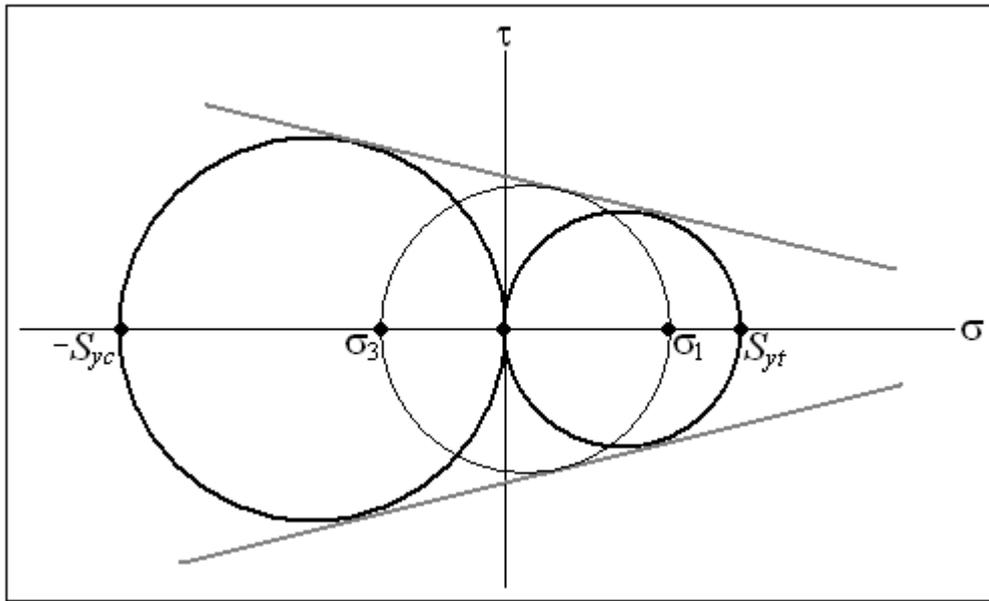


Figura 2.6. Círculos de Mohr de los ensayos de tensión y compresión al momento de la falla en línea negra gruesa, y el círculo de Mohr de un estado de esfuerzos de un elemento al momento de la falla en línea negra delgada. La línea más clara es la línea donde se produce la falla.

La ecuación de la línea de falla cuando $\sigma_1 > 0 > \sigma_3$ resulta ser:

$$\frac{\sigma_1}{S_{yt}} - \frac{\sigma_3}{S_{yc}} = 1 \quad (2.16)$$

En los otros casos, la falla se dará cuando:

$$\begin{cases} \sigma_1 = S_{yt}, & \text{cuando } \sigma_1 > \sigma_3 > 0 \\ \sigma_3 = -S_{yc}, & \text{cuando } 0 > \sigma_1 > \sigma_3 \end{cases} \quad (2.17)$$

En el plano $\sigma_1 - \sigma_3$, la teoría de Coulomb-Mohr Dúctil se representa gráficamente como:

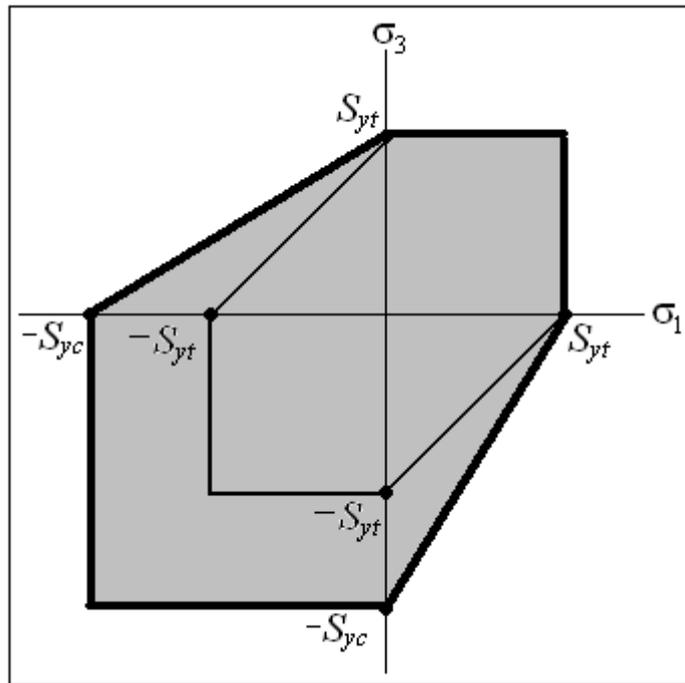


Figura 2.7. Representación gráfica de la teoría de Coulomb-Mohr dúctil.

La falla se presentará cuando el punto determinado por los esfuerzos σ_1 y σ_3 se encuentra fuera del área sombreada en la figura 2.7. La línea más gruesa representa las locaciones donde se presentará la falla de acuerdo con Coulomb-Mohr, las líneas interiores más delgadas representan las locaciones de falla de acuerdo con Tresca.

De la figura 2.7 puede observarse que la teoría de Coulomb-Mohr tiene un mayor área en la cual no se presentará falla que la teoría de Tresca, por eso y por lo que se ha hecho notar de la figura 2.5, es que la teoría del esfuerzo cortante máximo es la teoría escogida para hacer cálculos *conservadores* de falla de un material y tener mayor certeza de que no se producirá falla.

3. Falla de materiales frágiles

Se considera frágil a un material que en el ensayo de tensión haya tenido menos del 5% de deformación antes de la fractura. En los materiales frágiles se considera que la falla se presenta cuando el material sufre de separación de sus partes (falla por fractura).

3.1. Teoría del Máximo Esfuerzo Normal

Enunciada por W. Rankine, la teoría enuncia:

“La falla se producirá cuando el esfuerzo normal máximo en la pieza sea igual o mayor al esfuerzo normal máximo de una probeta sometida a un ensayo de tensión en el momento que se produce la fractura”

Notando la resistencia a la tensión como S_{ut} y la resistencia a compresión como S_{uc} , tenemos que según la teoría, la falla se dará cuando:

$$\begin{aligned}
 \max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) &= S_{ut}, \text{ cuando } |\max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)| > |\min(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)| \\
 \min(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) &= S_{uc}, \text{ cuando } |\min(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)| > |\max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)|
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

Para el caso bidimensional, en el plano $\sigma_1 - \sigma_3$, la teoría del máximo esfuerzo normal se representa gráficamente como:

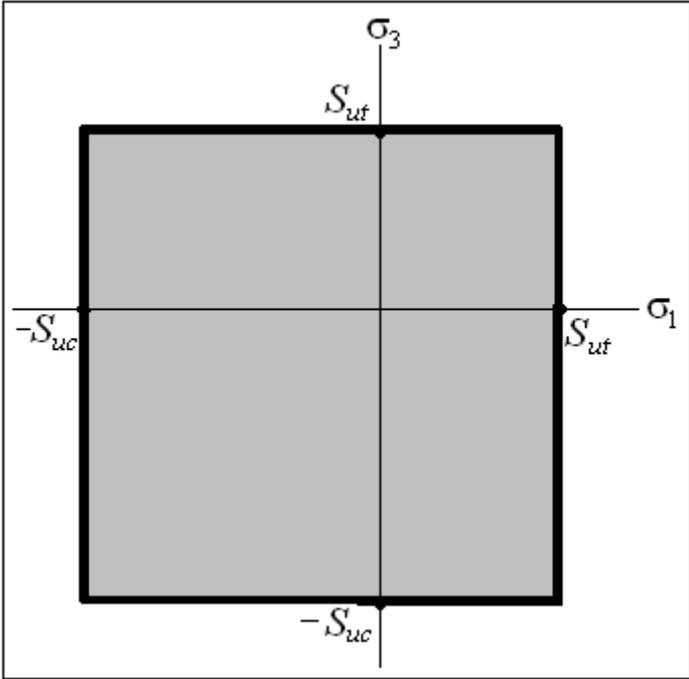


Figura 3.1. Representación gráfica de la teoría del esfuerzo normal máximo.

La falla se presentará cuando el punto determinado por los esfuerzos σ_1 y σ_3 se encuentra fuera del área sombreada en la figura 3.1.

3.2. Teoría de Coulomb-Mohr Frágil

Se deriva de forma similar a la teoría de Coulomb-Mohr Dúctil sólo que, al tratarse de materiales frágiles, se tienen en cuenta las resistencias últimas del material a la tensión y compresión en lugar de los esfuerzos de fluencia.

La ecuación de la línea de falla cuando $\sigma_1 > 0 > \sigma_3$ resulta ser:

$$\frac{\sigma_1}{S_{ut}} - \frac{\sigma_3}{S_{uc}} = 1
 \tag{3.2}$$

En los otros casos, la falla se dará cuando:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= S_{ut}, \text{ cuando } \sigma_1 > \sigma_3 > 0 \\ \sigma_3 &= -S_{uc}, \text{ cuando } 0 > \sigma_1 > \sigma_3 \end{aligned} \quad (3.3)$$

En el plano $\sigma_1 - \sigma_3$, la teoría de Coulomb-Mohr Frágil se representa gráficamente como:

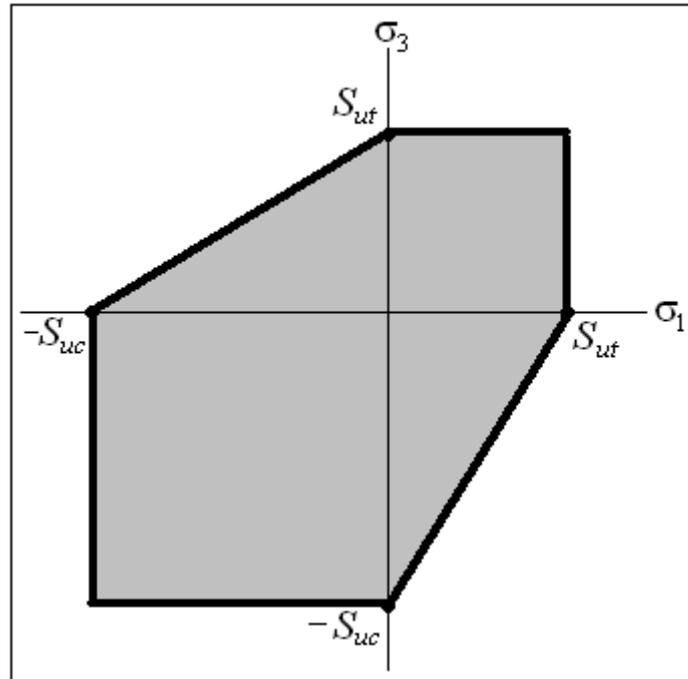


Figura 3.2. Representación gráfica de la teoría de Coulomb-Mohr frágil.

La falla se presentará cuando el punto determinado por los esfuerzos σ_1 y σ_3 se encuentra fuera del área sombreada en la figura 3.2.

De las figuras 3.1 y 3.2 puede observarse que el área libre de falla es mayor según la teoría del máximo esfuerzo normal que según la teoría de Coulomb-Mohr Frágil, por lo anterior, para cálculos de diseño *conservadores* en materiales frágiles se recomienda usar la teoría de Coulomb-Mohr Frágil.

RESUMEN DE LAS TEORÍAS DE FALLA

En las siguientes ecuaciones, n es el factor de seguridad que se elige para el diseño.

MATERIALES DÚCTILES

- **Máximo Esfuerzo Cortante** (cálculos conservadores)

$$\begin{aligned}\sigma_1 - \sigma_3 &= \frac{S_y}{n}, \text{ cuando } \sigma_1 > 0 > \sigma_3 \\ \sigma_1 &= \frac{S_y}{n}, \text{ cuando } \sigma_1 > \sigma_3 > 0 \\ \sigma_3 &= -\frac{S_y}{n}, \text{ cuando } 0 > \sigma_1 > \sigma_3\end{aligned}$$

- **Energía de Distorsión**

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3} = \frac{S_y}{n}$$

- **Coulomb-Mohr Dúctil**

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_1}{S_{yt}} - \frac{\sigma_3}{S_{yc}} &= \frac{1}{n}, \text{ cuando } \sigma_1 > 0 > \sigma_3 \\ \sigma_1 &= \frac{S_{yt}}{n}, \text{ cuando } \sigma_1 > \sigma_3 > 0 \\ \sigma_3 &= -\frac{S_{yc}}{n}, \text{ cuando } 0 > \sigma_1 > \sigma_3\end{aligned}$$

MATERIALES FRÁGILES

- **Máximo Esfuerzo Normal**

$$\begin{aligned}\max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) &= S_{ut} / n, \text{ cuando } |\max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)| > |\min(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)| \\ \min(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) &= S_{uc} / n, \text{ cuando } |\min(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)| > |\max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)|\end{aligned}$$

- **Coulomb-Mohr Frágil** (cálculos conservadores)

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_1}{S_{ut}} - \frac{\sigma_3}{S_{uc}} &= \frac{1}{n}, \text{ cuando } \sigma_1 > 0 > \sigma_3 \\ \sigma_1 &= \frac{S_{ut}}{n}, \text{ cuando } \sigma_1 > \sigma_3 > 0 \\ \sigma_3 &= -\frac{S_{uc}}{n}, \text{ cuando } 0 > \sigma_1 > \sigma_3\end{aligned}$$