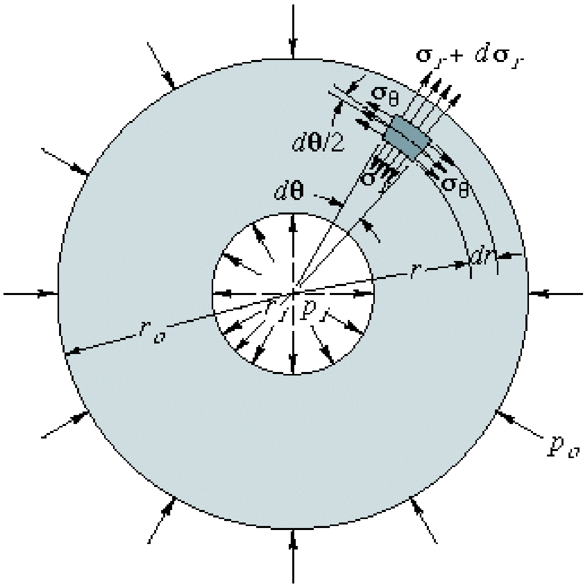
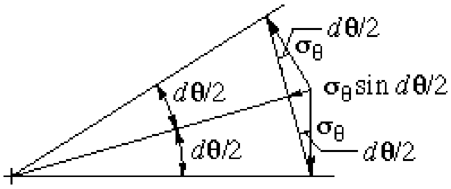
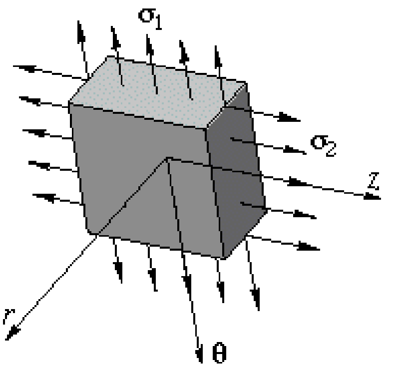
CILINDROS DE PARED GRUESA







1) PLANTEANDO EL EQUILIBRIO

$$\left(\sigma_r + \frac{d\sigma_r}{dr}dr\right)(r+dr)d\theta\, dz - \sigma_r\, r\, d\theta\, dz - 2\sigma_\theta\, sen\left(\frac{d\theta}{2}\right) dr\, dz = 0$$

Aclaraciones

Tensión y Área

A) Como $d\theta \ll$ (es muy pequeño) $\Longrightarrow sen\left(\frac{d\theta}{2}\right) = \frac{d\theta}{2}$

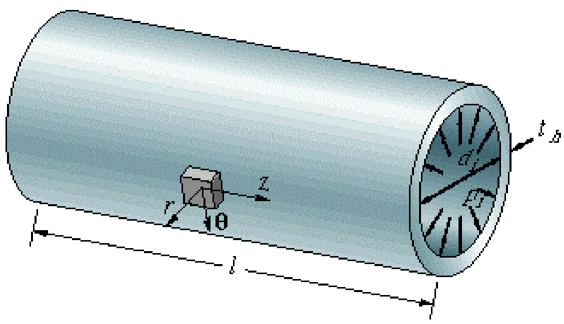
$$\left(\sigma_r\, r + \frac{d\sigma_r}{dr}dr\, r + dr\sigma_r + dr\, \frac{d\sigma_r}{dr}dr\right) d\theta\, dz - \sigma_r\, r\, d\theta\, dz - \cancel{2}\, \sigma_\theta \frac{d\theta}{\cancel{2}} dr\, dz = 0$$

B) Factor común $d\theta\, dz$

$$\left[\cancel{\sigma_r\, r} + \frac{d\sigma_r}{dr}dr\, r + dr\, \sigma_r + dr\, \frac{d\sigma_r}{dr}dr - \cancel{\sigma_r\, r} - \sigma_\theta\, dr\right] d\theta\, dz = 0$$

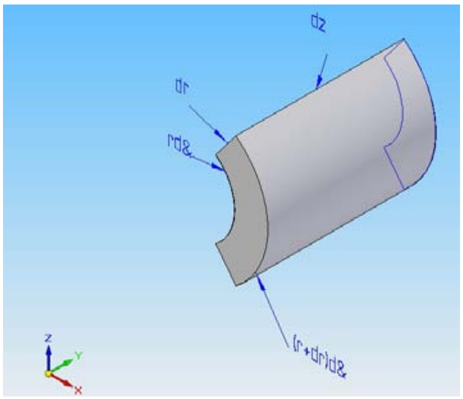
$$\frac{d\sigma_r}{dr}dr\, r + dr\, \sigma_r + dr\, \frac{d\sigma_r}{dr}dr - \sigma_\theta\, dr = 0$$

$$\frac{d\sigma_r}{dr}dr\, r + dr\, \sigma_r + \cancel{\frac{d\sigma_r}{dr}dr^2} - \sigma_\theta\, dr = 0$$



C) Despreciando los infinitésimos de segundo orden

$$\frac{d\sigma_r}{dr}dr\, r + dr\, \sigma_r = \sigma_\theta\, dr$$



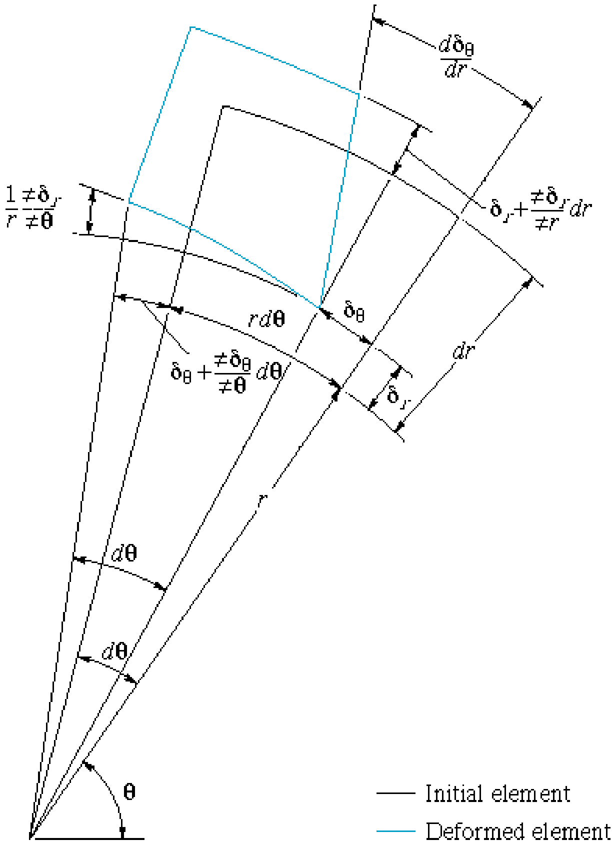
$$\sigma_\theta = \frac{\frac{d\sigma_r}{dr}\,dr\,r + dr\,\sigma_r}{dr}$$

$$\sigma_\theta = \frac{\frac{d\sigma_r}{dr}\cancel{dr}\,r}{\cancel{dr}} + \frac{\cancel{dr}\,\sigma_r}{\cancel{dr}}$$

$$\sigma_\theta = r\frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r$$ ECUACION 1

Esta ecuación da una relación entre σ_r y σ_θ

2) ELEMENTO CILÍNDRICO POLAR DE UN CILINDRO DE PARED GRUESA (antes y después de la deformación)



Hay que obtener una segunda relación de la deformación del cilindro, **para ello hay que suponer que la deformación longitudinal de todas las fibras es igual**, por lo tanto la deformación es simétrica respecto del eje **y por lo tanto existe un desplazamiento radial de todos los puntos de la pared del cilindro.** Dicho desplazamiento es constante en la dirección circunferencial θ, pero varia con la distancia r (radio).

Aclaraciones

$\delta_r = desplazamiento\ radial\ de\ una\ superficie\ cilindrica\ de\ radio\ r$

$$\delta_r + \frac{\partial \delta_r}{\partial r} dr = desplazamiento\ radial\ de\ una\ superficie\ de\ r + dr$$

$\varepsilon_r = elongacion\ unitaria\ en\ la\ direccion\ radial$ r

$$\varepsilon_\theta = elongacion\ unitaria\ en\ la\ direccion\ circunferencial\ \theta$$

SEGÚN EL ESQUEMA ANTERIOR

$$\varepsilon_r = \frac{\delta_r + \frac{\partial \delta_r}{\partial r} dr - \delta_r}{dr} = \frac{\cancel{\delta_r} + \frac{\partial \delta_r}{\partial r} \cancel{dr} - \cancel{\delta_r}}{\cancel{dr}} = \frac{\partial \delta_r}{\partial r}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{(r + \delta_r) d\theta - r\, d\theta}{r\, d\theta} = \frac{r\, d\theta + \delta_r\, d\theta - r\, d\theta}{r\, d\theta} = \frac{(\cancel{r} + \delta_r - \cancel{r})\cancel{d\theta}}{r\, \cancel{d\theta}} = \frac{\delta_r}{r}$$

Aclaraciones

$r + \delta_r = \delta_\theta$ (según la figura)

$r\, d\theta$ (Distancia de un arco cuyo radio es r y ángulo es $d\theta$)

LEY DE HOOKE

Las deformaciones longitudinales ε, son proporcionales a las tensones normales σ que las producen. Hay que observar que el alargamiento ε debido las tensiones normales σ, va acompañado de acortamientos longitudinales en dirección de los otros ejes.

$\varepsilon_r = \frac{\partial \delta_r}{\partial r} = \frac{\sigma_r - \nu\, \sigma_\theta}{E}$ ECUACION 2

$\varepsilon_\theta = \frac{\delta_r}{r} = \frac{\sigma_\theta - \nu\, \sigma_r}{E}$ ECUACION 3

Con las ecuaciones 2 y 3 se pueden obtener las tensiones en función de las elongaciones:

$\sigma_r = \frac{(\varepsilon_r - \nu\, \varepsilon_\theta)E}{1-\nu^2}$ ECUACION 4

$\sigma_\theta = \frac{(\varepsilon_\theta - \nu\, \varepsilon_r)E}{1-\nu^2}$ ECUACION 5

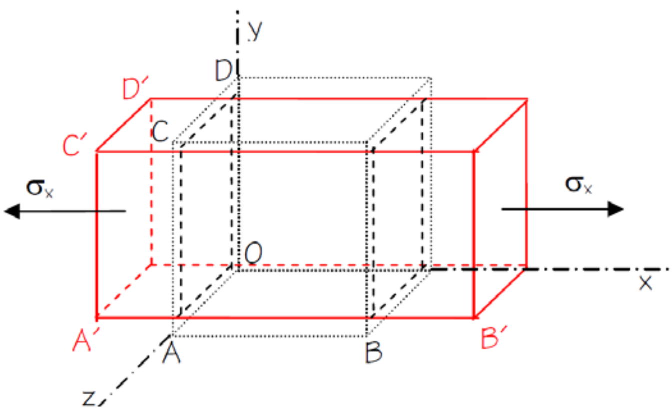
Aclaraciones

$$E = modulo\ de\ elasticidad\ longitudinal$$

$$\nu = coeficiente\ de\ Poisson$$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)}{E}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)}{E}$$



3) FORMULACIÓN (PASOS)

INCOGNITAS: δ_r, σ_r y σ_θ

A) Sustituyendo las ecuaciones 2 y 3 (elongación unitaria) en las ecuaciones 4 y 5 y resulta:

$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial \delta_r}{\partial r} - \nu \frac{\delta_r}{r}\right)$ ECUACION 6

$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\delta_r}{r} - \nu \frac{\partial \delta_r}{\partial r}\right)$ ECUACION 7

B) Introduciendo estas expresiones en la Ecuación 1, hallamos la ecuación diferencial de los desplazamientos:

$$\frac{d^2\delta_r}{dr^2} + \frac{d\delta_r}{dr}\frac{1}{r} - \frac{\delta_r}{r^2} = 0$$

C) Cuya solución es:

$$\delta_r = C_1\, r + \frac{C_2}{r} \quad \text{ECUACION 8}$$

D) Sustituimos la ecuación 8 en las ecuaciones 6 Y 7, teniendo en cuenta $\frac{d\delta_r}{dr} = C_1 - \frac{C_2}{r^2}$

$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}\left[C_1(1-\nu) - C_2\frac{1-\nu}{r^2}\right]$ ECUACION 9

$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2}\left[C_1(1-\nu) + C_2\frac{1-\nu}{r^2}\right]$ ECUACION 10

E) Determinar C_1 y C_2 aplicando condiciones de contorno en las superficies interior y exterior del cilindro:

$\sigma_r = -p_i$ en $r = r_i$

$\sigma_r = -p_i$ en $r = r_o$

Aclaraciones

El signo negativo marca que la tensión es de compresión

$$C_1 = \frac{1-\nu}{E}\left[\frac{p_i r_i^2 - p_o r_o^2}{r_o^2 - r_i^2}\right]$$

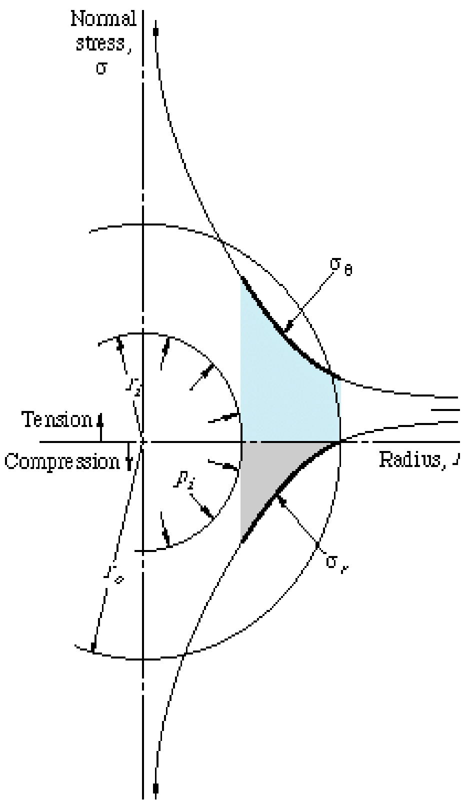
$$C_2 = \frac{1-\nu}{E}\left[\frac{(p_o - p_i)(r_o\, r_1)^2}{r_o^2 - r_i^2}\right]$$

F) Introduciendo los valores de C_1 y C_2 y las ecuaciones 9 y 10:

$$\boldsymbol{\sigma_\theta = \frac{p_i r_i^2 - p_o r_o^2 - (p_o - p_i)\left(\frac{r_o\, r_1}{r}\right)^2}{r_o^2 - r_i^2}}$$

$$\boldsymbol{\sigma_r = \frac{p_i r_i^2 - p_o r_o^2 + (p_o - p_i)\left(\frac{r_o\, r_1}{r}\right)^2}{r_o^2 - r_i^2}}$$

4) TENSIONES EN UN CILINDRO DE PARED GRUESA



Cilindro de pared gruesa internamente presurizado, que muestra los esfuerzos circunferencial (en el aro) y radial para diferentes valores del radio